Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2018

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (8 ptos.) Considere los planos $\Pi_1 : -2x - y + 17z = 4$, $\Pi_2 : 2x - y - z + 7 = 0$ y la recta de ecuación $L_1 : x = 0, \dfrac{y}{4} = 2z$. Determine:

a. La ecuación paramétrica de la recta L que es intersección de los planos Π_1 y Π_2.

b. La ecuación del plano Π que pasa por el origen y es paralelo a las rectas L y L_1.

Solución: Las coordenadas de los puntos pertenecientes a la recta L son las soluciones al sistema de ecuaciones formado con las ecuaciones de los planos Π_1 y Π_2. Como

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -9/2 & -11/4 \\ 0 & 1 & -8 & 3/2 \end{array}\right)$$

las ecuaciones paramétricas de la recta L son

$$\begin{aligned} x = & \ -\frac{11}{4} + \frac{9}{2}t \\ y = & \ \frac{3}{2} + 8t \\ z = & \ t \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
Como los vectores directores de las rectas L y L_1 son $\left(9/2, 8, 1\right)$ y $\left(0, 4, 1/2\right)$, respectivamente, cualquier vector normal al plano Π es múltiplo escalar de

$$\eta = \left(9/2, 8, 1\right) \times \left(0, 4, 1/2\right) = \left(0, -9/4, 18\right)$$

Luego, como el plano Π pasa por el origen, su ecuación es

$$-\frac{9}{4}y + 18z = 0$$

o, equivalentemente,

$$y - 8z = 0.$$

Pregunta 2. (9 ptos.) Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ junto con las operaciones de suma y multiplicación por escalares usuales. Sea el subconjunto $S = \{1+x,\, 1+x^2+x^3,\, 1+x^2,\, 1+x+x^3\}$. Determine:

a. El espacio H generado por S.

b. ¿Es S un conjunto linealmente independiente?

c. Halle una base para H y su dimensión.

Solución: Para hallar el espacio generado por S debemos determinar cuáles polinomios $a+bx+cx^2+dx^3$ se expresan como combinación lineal de los elementos en S; es decir,

$$\lambda_1\big(1+x\big)+\lambda_2\big(1+x^2+x^3\big)+\lambda_3\big(1+x^2\big)+\lambda_4\big(1+x+x^3\big) = a+bx+cx^2+dx^3$$

lo que equivale a que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

sea consistente. Como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & -1 & c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a+c \end{array}\right)$$

se tiene que

$$H = \left\{ a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{P}_3 \;\middle|\; b-a+c=0 \right\}$$

Además, ya que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema homogéneo posee infinitas soluciones, por lo que el conjunto S es linealmente dependiente.
Como la matriz aumentada del sistema homogéneo es equivalente por filas a una matriz esclonada cuyos pivotes están en las primeras tres columnas, los primeros tres vectores de S constituyen un conjunto linealmente independiente que genera al mismo espacio vectorial que todo S; es decir, el conjunto $\left\{1+x,\ 1+x^2+x^3,\ 1+x^2\right\}$ es una base par H y $\dim H = 3$.

Pregunta 3. (9 ptos.) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Determine:

a. Ecuaciones que describan el espacio fila de A.

b. Una base para el subespacio $N = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A^t\vec{x} = \vec{0}\right\}$.

c. La dimensión del espacio fila de A y la dimensión de N.

Solución: Como

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & 6 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces el espacio fila de A es generado por los vectores $\left(1, 0, -5/2, 6\right)$ y $\left(0, 1, -1/2, 2\right)$. Luego, como

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -5/2 & -1/2 & c \\ 6 & 2 & d \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c + \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & d - 6a - 2b \end{array}\right)$$

se tiene que el espacio fila de A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; c + \frac{5}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \;\text{ y }\; d - 6a - 2b = 0 \right\}$$

Dado que

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

los vectores en N se expresan como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-d \\ -c-d \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y, ya que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son uno múltiplo escalar del otro se tiene que son linealmente independientes por lo que, estos vectores constituyen una base para N.
Como el espacio fila también es generado por dos vectores que son linealmente independientes (por no ser uno múltiplo escalar del otro), se tiene que tanto el espacio de A como N son espacios vectoriales de dimensión igual a 2.

Pregunta 4. (3 ptos. c/u) Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a. Sean $u = -i + 2j$, $v = j - k$ y $w = i - 3k$ entonces, el volumen del paralelepípedo generado por u, v y w es igual a 5.

b. Sea $H = \left\{ A \in M_{2\times 2} \;\middle|\; A \text{ no es invertible} \right\}$ entonces, H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

c. Sean $u = i$, $v = j$ y $w = i + j$ vectores en $\mathbb{R}^2$ entonces, $\left|\text{proy}_u w\right| = \left|\text{proy}_v w\right|$.

Solución:

a. Como

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 5$$

la proposición es falsa.

b. Como las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son invertibles, pertenecen a H. Sin embargo, la suma de ellas no está en H (ya que la matriz identidad sí es invertible) ilustrando que H no es cerrado bajo la suma. Por lo tanto, la proposición es falsa.

c. Como

$$\left|\mathrm{proy}_u w\right| = |u| = 1 = |v| = \left|\mathrm{proy}_v w\right|$$

la proposición es verdadera.